შეფასების სქემა

მათემატიკა - II ვარიანტი

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“ -ს ქვეშ გაიგება <u>პასუხის დასაბუთებით მიღება.</u>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ა	**ა**	**გ**	**დ**	**დ**	**გ**	**ბ**	**ბ**	**დ**	**ა**	**ა**	**ბ**	**გ**	**დ**	**დ**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
გ	**ბ**	**ა**	**ბ**	**დ**	**დ**	**გ**	**გ**	**ა**	**დ**	**დ**	**ბ**	**გ**	**ბ**	**ბ**

31	32	33	34	35	36	37
ა	**გ**	**ა**	**გ**	**ბ**	**ა**	**გ**

(3) 38.

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არის $(a+1;\ 3)$ და $(-2;\ 3-a)$ წერტილებს შორის მანძილი 4-ის ტოლი?

ამოხსნა

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, ამიტომ $(a+1;\ 3)$ და $(-2;\ 3-a)$ წერტილებს შორის მანძილი იქნება $\sqrt{(a+1-(-2))^2+(3-(3-a))^2}$.

ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება

$$\sqrt{(a+3)^2+a^2}=4 \Leftrightarrow (a+3)^2+a^2=16 \Leftrightarrow 2a^2+6a-7=0 \Leftrightarrow a=\frac{-3-\sqrt{23}}{2} \text{ ან } a=\frac{-3+\sqrt{23}}{2}.$$

პასუხი: $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}}{2}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა $(a+1;\ 3)$ და $(-2;\ 3-a)$ წერტილებს შორის მანძილის გამოსათვლელი გამოსახულება $\sqrt{(a+1-(-2))^2+(3-(3-a))^2}$ ან მისი კვადრატი;

ბ) შეადგინა $\sqrt{(a+1-(-2))^2+(3-(3-a))^2}=4$ ან მისი ტოლფასი განტოლება;

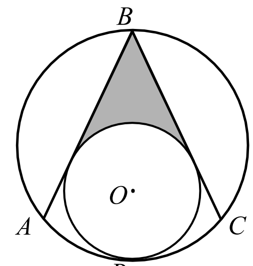
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

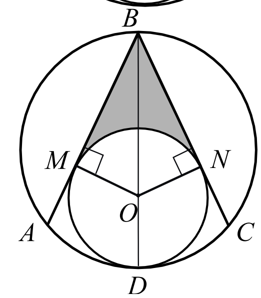
1 ქულა - ა.
2 ქულა - ბ.
3 ქულა - ბ, გ.

(3) 39.

ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს, ამასთან დიდ წრეწირში გავლებული AB და BC ქორდები მცირე წრეწირის მხებებია (იხ. სურათი). იპოვეთ სურათზე გამოსახული გამუქებული ფიგურის ფართობი, თუ დიდი წრეწირის რადიუსის სიგრძე 12 სმ - ის ტოლია, $AB = BC$ და $\angle ABC = 60°$.



ამოხსნა



AB და BC ქორდების მცირე წრეწირთან შეხების წერტილებში გავავლოთ OM და ON რადიუსები. გვექნება $OM \perp MB$, $ON \perp NB$, $MB = NB$. ამიტომ BMO და BNO სამკუთხედები ტოლია.

გავავლოთ ABC კუთხის BD ბისექტრისა. რადგან $\angle ABD = \angle CBD$, ამიტომ AD და CD ტოლი რკალებია. $AB = BC$ ტოლობიდან გამომდინარეობს AB და BC რკალების ტოლობა. მაშასადამე, BAD და BCD რკალები ტოლია. ე.ი. BD დიამეტრია. რადგან ამ დიამეტრზე მდებარეობს მცირე წრეწირის ცენტრი, ამიტომ D იქნება წრეწირების შეხების წერტილი.

$\angle MON = 180° - 60° = 120°$. საძიებელი ფიგურის ფართობი $MONB$ ოთხკუთხედისა და MON სექტორის ფართობების სხვაობის ტოლია.

მცირე წრეწირის რადიუსი აღვნიშნოთ r-ით, მაშინ $OB = 24 - r$ სმ, რადგან $\angle MBO = 30°$ მივიღებთ $r = \dfrac{24 - r}{2} \Leftrightarrow r = 8$ სმ. გვექნება MON სექტორის ფართობი ტოლია $\dfrac{\pi r^2}{3} = \dfrac{64\pi}{3}$ სმ².

$S_{\triangle MOB} = \dfrac{1}{2} OM \cdot OB \cdot \sin 60° = 32\sqrt{3}$ სმ². $MONB$ ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია $2 \cdot S_{\triangle MOB} = 64\sqrt{3}$ სმ². ე.ი. საძიებელი ფიგურის ფართობია $\left(64\sqrt{3} - \dfrac{64\pi}{3}\right)$ სმ².

პასუხი: $\left(64\sqrt{3} - \dfrac{64\pi}{3}\right)$ სმ².

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\angle MON = 120°$; ან დაწერა MN რკალის გრადუსული ზომა არის $120°$;
ან BO მონაკვეთი გამოსახა დიდი და მცირე წრეწირების რადიუსების საშუალებით;
ან საძიებელი ფართობი წარმოადგინა $MONB$ ოთხკუთხედისა და MON სექტორის ფართობების სხვაობის სახით (ან MBN სამკუთხედისა და MN რკალის მქონე სეგმენტის ფართობების სხვაობის სახით).

ბ) გამოთვალა MON სექტორის ფართობი;
ან გამოთვალა $MONB$ ოთხკუთხედის ან MOB სამკუთხედის ან MBN სამკუთხედის ფართობი;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.

2 ქულა - ბ.

3 ქულა - ბ, გ.

შენიშვნა: თუ საძიებელი ფიგურის ფართობი გამოთვალა ერთი რომელიმე მონაკვეთის სიგრძის საშუალებით (მაგ. მცირე წრეწირის რადიუსით, ან რაიმე სხვა მონაკვეთის სიგრძის საშუალებით), ნაშრომი შეფასდეს 2 ქულით.

(4) 40.

მანძილი A და B პუნქტებს შორის 22 კილომეტრია. A და B პუნქტებიდან ერთდროულად გამოვიდა ორი ტურისტი და მუდმივი სიჩქარეებით დაიწყეს მოძრაობა ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით, ვიდრე A და B პუნქტებს შორის მდებარე გარკვეულ წერტილში არ შეხვდნენ ერთმანეთს. B პუნქტიდან გამოსულ ტურისტს 1 კმ/სთ–ით უფრო სწრაფად რომ ემოძრავა, ხოლო A პუნქტიდან გამოსულ ტურისტს იგივე სიჩქარით, რა სიჩქარითაც მოძრაობდა, მაშინ შეხვედრის ადგილი A პუნქტთან 1 კილომეტრით უფრო ახლოს იქნებოდა. იპოვეთ B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე, თუ A პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარეა 6 კმ/სთ.

ამოხსნა 1

ვთქვათ B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარეა x კმ/სთ, ხოლო შეხვედრამდე გასული დრო t სთ. მაშინ $t(x+6)=22$, საიდანაც $t=\dfrac{22}{x+6}$ სთ. B პუნქტიდან გამოსული ტურისტი ამ დროში გაივლის $xt=\dfrac{22x}{x+6}$ კილომეტრს. B პუნქტიდან გამოსულ ტურისტს 1 კმ/სთ–ით უფრო სწრაფად რომ ემოძრავა, მაშინ მისი სიჩქარე იქნებოდა $(x+1)$ კმ/სთ, ის შეხვედრამდე $t_1=\dfrac{22}{x+7}$ საათს იმოძრავებდა და ამ დროში B პუნქტიდან გამოსული ტურისტი გაივლიდა $(x+1)t_1=\dfrac{22\,(x+1)}{x+7}$ კმ-ს, რაც ამოცანის პირობის თანახმად 1 კმ-ით მეტია წინა შემთხვევაში გავლილ მანძილზე, ამიტომ

$$\frac{22\,(x+1)}{x+7}-\frac{22x}{x+6}=1,$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას

$$x^2+13x-90=0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია $x_1=-18,\ x_2=5$.

პასუხი: 5 კმ/სთ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ A პუნქტიდან თავდაპირველი შეხვედრის ადგილამდე მანძილი არის x კმ, A პუნქტიდან გამოსული ტურისტი შეხვედრის ადგილამდე მისვლას $\dfrac{x}{6}$ საათს მოანდომებს. B პუნქტიდან გამოსული ტურისტი ამ დროის განმავლობაში გაივლის $22-x$ კმ-ს, ამიტომ მისი სიჩქარე იქნება $\dfrac{22-x}{x/6}=\dfrac{6(22-x)}{x}$ კმ/სთ. თუ ეს ტურისტი სიჩქარეს 1 კმ/სთ-ით გაზრდის, მაშინ მისი სიჩქარე გახდება $\dfrac{6(22-x)}{x}+1=\dfrac{132-5x}{x}$ კმ/სთ და რადგან შეხვედრამდე 1 კმ-ით მეტს, ანუ $(23-x)$ კმ-ს გაივლის, ამიტომ შეხვედრის ადგილამდე მისვლას ის $(23-x):\dfrac{132-5x}{x}=\dfrac{x(23-x)}{132-5x}$ საათს მოანდომებს. ამ ხნის განმავლობაში A პუნქტიდან გამოსული ტურისტი გაივლის $\dfrac{6x(23-x)}{132-5x}$ კმ-ს, რაც 1 კმ-ით ნაკლებია წინა შემთხვევაში გავლილ მანძილზე. ვღებულობთ განტოლებას

$$\frac{6x(23-x)}{132-5x}=x-1 \Leftrightarrow 6x(23-x)=(x-1)(132-5x) \Leftrightarrow x^2-x-132=0.$$

განტოლების ამონახსნებია $x_1=-11,\ x_2=12.$ ე.ი. $x=12$, ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარის გამოსათვლელ გამოსახულებაში: $\frac{6(22-x)}{x}$. მივიღებთ, რომ B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარეა $\frac{6(22-12)}{12}=5$ კმ/სთ.

ამოხსნა 3

ვთქვათ ტურისტებს შეხვედრამდე დასჭირდათ t_1 საათი, ხოლო B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის მიერ სიჩქარის გაზრდის შემდეგ შეხვედრამდე დასჭირდათ t_2 საათი. მაშინ A პუნქტიდან გამოსული ტურისტი პირველ შემთხვევაში გაივლის $6t_1$ კმ-ს, ხოლო მეორე შემთხვევაში $6t_2$ კმ-ს. B პუნქტიდან გამოსული ტურისტი პირველ შემთხვევაში გაივლის $22-6t_1$ კმ-ს, ხოლო მეორე შემთხვევაში $22-6t_2$ კმ-ს. B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე პირველ შემთხვევაში იქნება $\frac{22-6t_1}{t_1}$ კმ/სთ, ხოლო მეორე შემთხვევაში იქნება $\frac{22-6t_2}{t_2}$. ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} 6t_1-6t_2=1 \\ \dfrac{22-6t_2}{t_2}-\dfrac{22-6t_1}{t_1}=1 \end{cases} \Rightarrow 6t^2-t-22=0 \Rightarrow t=2 \text{ სთ.}$$

მაშინ B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე იქნება $v=\frac{22-6t}{t}=5$ კმ/სთ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ერთმანეთთან დააკავშირა:

B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე (v) და შეხვედრამდე გასული დრო სიჩქარის გაზრდამდე ან სიჩქარის გაზრდის შემდეგ (მაგ., $t_1(v+6)=22$, ან $t_2(v+7)=22$);

ან A (ან B) პუნქტიდან შეხვედრის ადგილამდე მანძილი (s) და B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე (v), მაგალითად, $v=\frac{6(22-s)}{s}$,

ან შეხვედრამდე გასული დრო სიჩქარის გაზრდამდე (t_1) და სიჩქარის გაზრდის შემდეგ (t_2), მაგალითად, $6t_1-6t_2=1$,

ან A პუნქტიდან გამოსული ტურისტი 1კმ-ს გადის $\frac{1}{6}$ სთ-ში;

ბ) ერთი და იგივე უცნობის საშუალებით გამოთვალა რომელიმე ტურისტის მიერ განვლილი მანძილი სიჩქარის გაზრდამდე და სიჩქარის გაზრდის შემდეგ, (მაგალითად, $\frac{22v}{v+6}$ და $\frac{22(v+1)}{v+7}$)

ან გამოთვალა შეხვედრამდე გავლილი მანძილი სიჩქარის გაზრდამდე და სიჩქარის გაზრდის შემდეგ, მაგალითად, s და $\frac{s(23-s)}{132-5s}$;

ან გამოთვალა შეხვედრამდე გასული დრო სიჩქარის გაზრდამდე და სიჩქარის გაზრდის შემდეგ (მაგ. $\frac{22}{v+6}$ და $\frac{22}{v+7}$);

ან შეადგინა ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი სიდიდის (A ან B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის მიერ გავლილი მანძილის ან შეხვედრამდე გასული დროის ან B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარის) პოვნა, მაგალითად,

$$\begin{cases} 6t_1 - 6t_2 = 1 \\ \frac{22-6t_2}{t_2} - \frac{22-6t_1}{t_1} = 1 \end{cases};$$

გ) შეადგინა ერთუცნობიანი განტოლება B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარის მიმართ, ან ერთუცნობიანი განტოლება რაიმე ცვლადის მიმართ და ამ ცვლადით გამოსახა B პუნქტიდან გამოსული ტურისტის სიჩქარე.

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

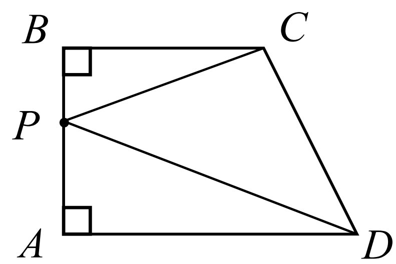
1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.
3 ქულა - ბ, გ.
4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა, რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

(4) 41.

$ABCD$ ტრაპეციაში $\angle A = 90°,\ BC \parallel AD,\ AB = h,\ BC = a,\ AD = b$. ტრაპეციის AB გვერდზე აღებულია P წერტილი ისე, რომ PAD და PBC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეების ფართობების ჯამი იღებს უმცირეს შესაძლო მნიშვნელობას. იპოვეთ ეს უმცირესი მნიშვნელობა და AP მონაკვეთის სიგრძე.

ამოხსნა



რადგან PAD და PBC მართკუთხა სამკუთხედებია, ხოლო PD და PC შესაბამისად ამ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების დიამეტრებია. ამიტომ ამ წრეწირების შესაბამისი წრეების ფართობების ჯამია

$$S = \frac{\pi}{4}\left(PD^2 + PC^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(PA^2 + AD^2 + PB^2 + BC^2\right).$$

თუ $AP = x$, მაშინ $BP = h - x$ და $S = \frac{\pi}{4}\left(x^2 + (h-x)^2 + a^2 + b^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(2x^2 - 2hx + h^2 + a^2 + b^2\right)$. ეს გამოსახულება წარმოადგენს კვადრატულ სამწევრს x ცვლადის მიმართ, რომელიც უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, როდესაც $x = \frac{h}{2}$. ამ შემთხვევაში წრეების ფართობების ჯამია $S_{\min} = \frac{\pi}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{2}\right)$.

პასუხი: $x_{\min} = \frac{h}{2}$, $S_{\min} = \frac{\pi}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{2}\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ამოცანის მონაცემებისა და AP და BP მონაკვეთების სიგრძეების საშუალებით გამოთვალა PAD ან PBC მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი, მაგალითად, დაწერა $S_1 = \frac{\pi}{4}\left(PA^2 + AD^2\right)$ ან $S_2 = \frac{\pi}{4}\left(PB^2 + BC^2\right)$.

ბ) ფართობების ჯამის მიღებული გამოსახულება წარმოადგინა ერთი ცვლადის ფუნქციის სახით

(მაგალითად, $S = \frac{\pi}{4}\left(2x^2 - 2hx + h^2 + a^2 + b^2\right)$, სადაც $x = PA,\ h = AB$).

გ) იპოვა საძიებელი ფართობების ჯამის უმცირესი მნიშვნელობა, ან AP მონაკვეთის სიგრძე, რომლისთვისაც ეს მნიშვნელობა მიიღწევა.

დ) მიიღო პასუხი: $AP = \frac{h}{2}$, $S_{\min} = \frac{\pi}{4}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{2}\right)$.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა;
2 ქულა: ა, ბ;
3 ქულა: ბ , გ;
4 ქულა: ბ, გ, დ.