შეფასების სქემა

მათემატიკა - I ვარიანტი

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“ -ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
გ	დ	ა	ა	გ	დ	დ	ბ	გ	გ	დ	ბ	დ	ბ	ა

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ბ	გ	გ	ბ	გ	ა	ბ	ა	დ	ა	დ	გ	გ	ბ	ბ

31	32	33	34	35	36	37
ბ	ბ	ა	დ	ა	ა	დ

(3) 38.

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არის $(a-1;\ 2-a)$ და $(-1;\ 3)$ წერტილები თანაბარი მანძილით დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან?

ამოხსნა

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, ამიტომ $(a-1;\ 2-a)$ და $(-1;\ 3)$ წერტილებიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილები იქნება შესაბამისად $\sqrt{(a-1-0)^2+(2-a-0)^2}$ და $\sqrt{(-1-0)^2+(3-0)^2}$. ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება

$$\sqrt{(a-1)^2+(2-a)^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2} \Leftrightarrow (a-1)^2+(2-a)^2=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-6a+5=10 \Leftrightarrow \ a=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{19} \text{ ან } a=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{19}.$$

პასუხი: $a=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა $(a-1;\ 2-a)$ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილის ან მისი კვადრატის გამოსათვლელი გამოსახულება (მაგ: $\sqrt{(a-1-0)^2+(2-a-0)^2}$) ან გამოთვალა $(-1;\ 3)$ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი;

ბ) შეადგინა $\sqrt{(a-1)^2+(2-a)^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2}$ ან მისი ტოლფასი განტოლება;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

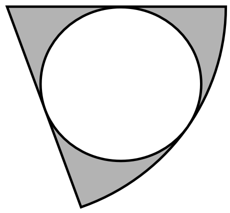
1 ქულა - ა.

2 ქულა - ბ.

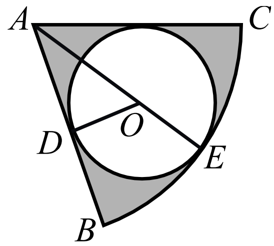
3 ქულა - ბ, გ.

(3) 39.

წრიულ სექტორში, რომლის ცენტრალური კუთხე 2α რადიანია, ჩახაზულია წრე, რომელიც ეხება სექტორის რადიუსებს და რკალს (იხ. სურათი). იპოვეთ სურათზე გამოსახული გამუქებული ფიგურის ფართობი, თუ სექტორის რადიუსი R - ის ტოლია.



ამოხსნა



საძიებელი ფიგურის ფართობი მოცემული სექტორის ფართობისა და მასში ჩახაზული წრის ფართობის სხვაობის ტოლია. სექტორის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად ABC სექტორის ფართობი $\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot 2\alpha = R^2\alpha$ -ს ტოლია. ჩახაზული წრის O ცენტრზე გავავლოთ ABC სექტორის AE რადიუსი, სადაც E წერტილი სექტორის და ჩახაზული წრის შეხების წერტილია (იხ. სურათი). სექტორისა და ჩახაზული წრის შეხების D წერტილში გავავლოთ $OD = r$ წრის რადიუსი. მიღებულ AOD მართკუთხა სამკუთხედში $AO = R - r$ და $\angle OAD = \alpha$, მაშინ $R - r = \frac{r}{\sin\alpha} \Leftrightarrow r = \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. ე.ი.

საძიებელი ფიგურის ფართობი ტოლია $R^2\alpha - \pi r^2 = R^2\alpha - \pi\cdot\left(\frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2$.

პასუხი: $S = R^2\alpha - \pi\cdot\left(\frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა სექტორის ფართობი ($R^2\alpha$);

ან AO მონაკვეთი გამოსახა სექტორისა და წრეწირის რადიუსების საშუალებით;

ან საძიებელი ფართობი წარმოადგინა სექტორისა და წრის ფართობების სხვაობის სახით;

ბ) წრის რადიუსი გამოსახა სექტორის რადიუსისა და α კუთხის საშუალებით ($r = \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$);

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ბ.
3 ქულა - ა, ბ, გ.

(4) 40.

ავტომობილის მძღოლს გარკვეული მუდმივი სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევაში A ქალაქიდან B ქალაქამდე გზა უნდა გაევლო წინასწარ დაგეგმილ დროში. აღმოჩნდა, რომ, თუ ავტომობილი ყოველ კილომეტრს გაივლიდა დაგეგმილზე 12 წამით ნაკლებ დროში, მაშინ გზის გავლას დასჭირდებოდა წინასწარ დაგეგმილზე ერთი საათით ნაკლები დრო, ხოლო, თუ ავტომობილის სიჩქარე იქნებოდა დაგეგმილზე 2 კმ/სთ-ით ნაკლები, მაშინ გზის გავლას დასჭირდებოდა წინასწარ დაგეგმილზე 15 წუთით მეტი დრო. რას უდრის ავტომობილის თავდაპირველად დაგეგმილი სიჩქარე?

ამოხსნა 1

ვთქვათ ავტომობილის დაგეგმილი სიჩქარეა v კმ/სთ და A ქალაქიდან B ქალაქამდე გზა უნდა გაევლო t საათში. მაშინ A ქალაქიდან B ქალაქამდე გზის სიგრძე იქნება vt კმ. ამ შემთხვევაში ავტომობილი 1 კმ-ის გავლას მოანდომებდა $\frac{1}{v}$ საათს. თუ ავტომობილი ყოველ კილომეტრს გაივლის დაგეგმილზე 12 წამით ნაკლებ დროში, მაშინ მისი სიჩქარე იქნება $\frac{1}{\frac{1}{v}-\frac{1}{300}}=\frac{300v}{300-v}$ კმ/სთ. მაშინ A ქალაქიდან B ქალაქამდე გზის სიგრძე იქნება $\frac{300v}{300-v}(t-1)$.

თუ ავტომობილის სიჩქარე იქნება დაგეგმილზე 2 კმ/სთ-ით ნაკლები, მაშინ გზის გავლას დასჭირდება წინასწარ განსაზღვრულზე 15 წუთით მეტი დრო, ამიტომ A ქალაქიდან B ქალაქამდე გზის სიგრძე არის $(v-2)\left(t+\frac{1}{4}\right)$ კმ.

ამრიგად, გვაქვს სისტემა

$$\begin{cases} vt=\frac{300v}{300-v}(t-1) \\ vt=(v-2)\left(t+\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(300-v)=300(t-1) \\ v-8t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^2+t-150=0 \\ v-8t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=6 \\ v=50 \end{cases}$$

პასუხი: 50 კმ/სთ.

ამოხსნა 2

თუ ავტომობილი ყოველ კილომეტრს გაივლიდა დაგეგმილზე 12 წამით ნაკლებ დროში, მაშინ მთელი გზის გავლას მოანდომებდა ერთი საათით ნაკლებს, ამიტომ მთელი გზის სიგრძე ყოფილა $\frac{3600}{12}=300$ კმ. ამოხსნა 1-ის აღნიშვნების გათვალისწინებით გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} vt=300 \\ (v-2)\left(t+\frac{1}{4}\right)=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt=300 \\ vt-2t+\frac{1}{4}v-\frac{1}{2}=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt=300 \\ v-8t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^2+t-150=0 \\ v-8t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=6 \\ v=50 \end{cases}.$$

პასუხი: 50 კმ/სთ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა დაგეგმილი სიჩქარის საშუალებით პირველ შემთხვევაში ავტომობილის სიჩქარე $\frac{300v}{300-v}$ კმ/სთ; ან გამოსახა ქალაქებს შორის მანძილი დაგეგმილი სიჩქარით და დროით მეორე შემთხვევაში (მაგ: $(v-2)\left(t+\frac{1}{4}\right)$) ან იპოვა ქალაქებს შორის მანძილი ან მიიღო განტოლება $v-8t=2$;

ბ) შეადგინა ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი სიდიდის პოვნა;

გ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება, საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი სიდიდის პოვნა;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

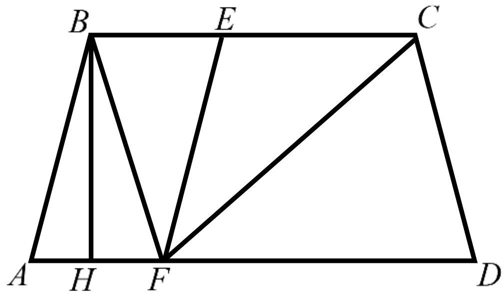
1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.
3 ქულა - ა, გ.
4 ქულა - ა, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა, რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

(4) 41.

$ABCD$ ტრაპეციის AD და BC ფუძეებზე აღებულია შესაბამისად F და E წერტილები ისე, რომ FE მონაკვეთი პარალელურია AB ფერდის, ამასთან ABF, BEF, FEC და FCD სამკუთხედების ფართობების კვადრატების ჯამი იღებს უმცირეს შესაძლო მნიშვნელობას. იპოვეთ ეს უმცირესი მნიშვნელობა და AF მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AD=16$, $BC=12$ და $ABCD$ ტრაპეციის სიმაღლე უდრის 10-ს.

ამოხსნა



გავავლოთ ტრაპეციის სიმაღლე BH. რადგან $AF \parallel BE$ და $AB \parallel FE$, ამიტომ $ABEF$ იქნება პარალელოგრამი. ვთქვათ $AF=x$. მაშინ $BE=x$, $FD=16-x$ და $EC=12-x$. გვაქვს

$$S_{ABF}=S_{BFE}=\frac{AF\cdot BH}{2}=\frac{10x}{2}=5x,$$

$$S_{FEC}=\frac{EC\cdot BH}{2}=\frac{(12-x)\cdot 10}{2}=5(12-x),$$

$$S_{FCD}=\frac{FD\cdot BH}{2}=\frac{(16-x)\cdot 10}{2}=5(16-x).$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=S_{ABF}^2+S_{BFE}^2+S_{FEC}^2+S_{FCD}^2=50x^2+25(12-x)^2+25(16-x)^2=100(x^2-14x+100).$$

ვინაიდან $f(x)$ არის კვადრატული ფუნქცია დადებითი უფროსი კოეფიციენტით, ამიტომ ის უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს $x=\frac{14}{2}=7$ წერტილში. ამრიგად $f_{\min}=5100$.

პასუხი: $7;\ 5100$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა ABF, BEF, FEC და FCD სამკუთხედებიდან ერთ-ერთის ფართობი x ცვლადით;
ბ) შეადგინა $f(x)$ ფუნქცია;
გ) დაადგინა, რომ $x=7$ ან იპოვა $f_{\min}=5100$;
დ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ბ.
3 ქულა - ბ, გ.
4 ქულა - ბ, გ, დ.